

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document, calculatrice, téléphone ou appareil électronique est interdit.

Durée : 3h

Le barème (sur 30) est donné à titre indicatif et pourrait être légèrement modifié.

Exercice 1 : Questions de cours /5 points

- a) Donner la définition d'intégrale divergente sur $[0, +\infty[$.
- b) Compléter : Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale de $x \mapsto x^\alpha$ converge au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha \dots$. Et l'intégrale de $x \mapsto x^\beta$ converge au voisinage de 0 si et seulement si $\beta \dots$.
- c) Vrai ou faux ? Si c'est faux, justifier en donnant un contre-exemple. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
 - Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.
 - Si f est continue sur $]a, b]$ alors f est intégrable sur $]a, b]$.
 - Si f est non bornée sur $]a, b]$ alors f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.

Exercice 2 : /10 points

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - E(x) - \frac{1}{2}$ où E désigne la fonction partie entière.

- a) Tracer le graphe de f sur $[-2, 2]$.
- b) Montrer que la fonction f est périodique, en précisant la période.
- c) La fonction f est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}$? Continue sur $\mathbb{R}$? $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$? (Justifier à chaque fois.)
- d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ on a $E(-x) = -E(x) - 1$. Puis que f coïncide avec une fonction impaire sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En déduire que certains coefficients de Fourier (réels) de f sont nuls.
- e) Calculer la série de Fourier (réelle) s_f de f .
- f) Étudier la convergence de s_f .
- g) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- h) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3 : /4 points

Quelle est la nature des intégrales impropres suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_1^{+\infty} \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} dx; & \mathcal{I}_2 &= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} dx; \\ \mathcal{I}_3 &= \int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} dx; & \mathcal{I}_4 &= \int_0^{+\infty} \left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right) e^{-19x} dx; \end{aligned}$$

Exercice 4 : /5 points

a) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ est convergente.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ est convergente et égale à $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$.

b) (Application du a)) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$I_n := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx \quad \text{et} \quad J_n := \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien convergentes et $I_n = J_n$.
2. Calculer $I_n + J_n$. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : /6 points

a) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est convergente. On admettra, par la suite, que de même pour tout $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ est convergente.

b) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1]$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} dt$ est divergente.

Soit $f : t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t}$ et $K = \int_1^{+\infty} f(t) dt$.

c) Montrer que $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$. Peut-on en déduire que K est convergente ?

d) Montrer que au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\frac{1}{1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}} = 1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

e) En déduire la nature de K .