

Exercice 2

$$(E) : x(x^2+1)y'' + (x^2-1)y' = 1$$

a) Soit y une solution de (E)

Alors, avec $x=0$ de (E) on trouve $-y'(0)=1$
soit $y'(0)=-1$ obligatoirement.

b) Soit $y_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière.
On suppose son rayon $R \neq 0$.

$$y_p \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-R; R[\text{ et } y'_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''_p(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

y_p solution de (E) sur $]-R; R[$

$$\Leftrightarrow x(x^2+1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (x^2-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 1$$

sur $]-R; R[$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n x^{n+1} - a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-2) a_n x^{n-1} = 1$$

sur $]-R; R[$

Rque: Je choisis de tout ramener à x^n pour plus de lisibilité mais d'autres choix sont possible.

$$\Leftrightarrow -a_1 + a_1 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(n-1) a_{n+1} x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 + (a_1 + 3a_3)x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left((n-1)^2 a_{n-1} + (n+1)(n-1) a_{n+1} \right) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 x^n$$

Par unicité du développement en série entière,
on trouve $a_1 = -1$ ($= y'(0)$ c'est normal)
 $6a_3 + a_1 = 0$
et $\forall n \geq 3 \quad (n+1)(n-1)a_{n+1} + (n-1)^2 a_{n-1} = 0$

d'où

$$a_1 = -1$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

$$\forall n \geq 3 \quad a_{n+1} = \frac{-(n-1)a_{n-1}}{(n+1)}$$

Par ailleurs $a_0 = y_p(0) = 0$ d'après B. c. I
tout comme $a_2 = \frac{y_p''(0)}{2} = 0$

<u>n pair</u>	
$a_0 = 0$	} d'après B. (c. I)
$a_2 = 0$	
$a_4 = \frac{-2a_2}{4} = 0$	
$\vdots$	
$a_{2n} = 0$	

<u>n impair</u>	
$a_1 = -1$	
$a_3 = \frac{1}{3}$	
$a_5 = \frac{-3a_3}{5}$	
$= \frac{(-3) \times (-1)}{5 \times 3} a_1 = \frac{1}{5}$	
$a_7 = \frac{-5a_5}{7} = \frac{-5}{7} \times \left(\frac{1}{5} \right)$	
$= \frac{1}{7}$	

Conjecture : $a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ valable aussi pour a_1 et a_3
 que l'on prouverait par récurrence.

Ainsi, $y_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}$ serait

une solution de (E) et des (C.I) sur $] -R; R[$
 sous réserve d'avoir $R \neq 0$

Vérifions : La série est lacunnaire, on fait
 un d'Alembert classique avec $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}$
 pour $x \neq 0$.

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+3} (2n+1)}{(2n+3) |x|^{2n+1}} = |x|^2 \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$\sim |x|^2$$

Si $|x|^2 < 1$, c'est $|x| < 1$ alors $\sum u_n(x)$ converge

Si $|x|^2 > 1$ c'est $|x| > 1$ alors $\sum u_n(x)$ diverge

On en déduit $R=1$

Ainsi y_p est solution de (E) et des (C.I)
 sur $] -1; 1[$

$$\begin{aligned} \text{c) } y'_p(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \quad \text{série géométrique} \\ &= \frac{-1}{1+x^2} \quad \text{sur }]-1; 1[\end{aligned}$$

Ainsi $y_p(x) = -\arctan(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$
 c'est sur $] -1; 1[$

Comme $y_p(0) = 0 + k = 0$ on a finalement
 $y_p(x) = -\arctan x$ solution de (E) sur $] -1; 1[$
et aussi sur $\mathbb{R}$ ainsi formulée (contrairement
à la formulation en série entière qui n'est
valable que sur $] -1; 1[$)