

Exo 1

a.) Soit f définie et continue sur I et $a \in I, \dots$

b.) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique alors...

c.) Soient f et g définies sur $[0; +\infty[$ [et localement intégrables].
Si $f \sim g$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et $g(x)$ de signe

constant sur vois de $+\infty$ (on peut accepter $g(x) \geq 0$)

Exo 2

Question préliminaire :

$$\int_{-\pi}^0 (x+\pi) \cos(nx) dx = \int_0^{\pi} t \cos(nt - n\pi) dt$$

$$t = x + \pi$$

$$dt = dx$$

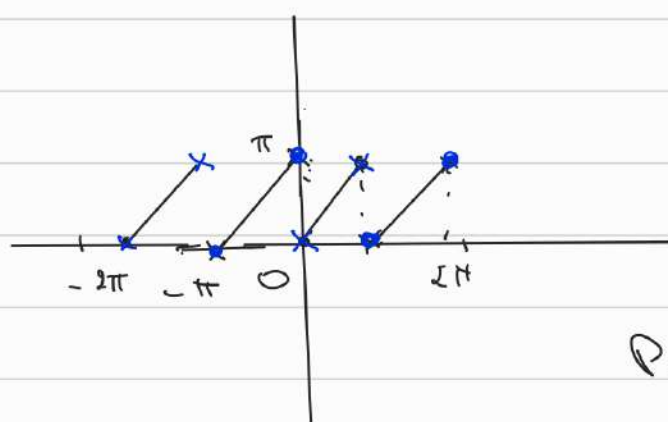
$$= (-1)^n \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt$$

$$\int_{-\pi}^0 (x+\pi) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} t \sin(nt - n\pi) dt$$

$$\text{Or } \sin(nt - n\pi) = \cos(n\pi) \sin(nt) - \cancel{\sin(n\pi) \cos(nt)}$$

$$= (-1)^n \sin(nt)$$

d'où le résultat.



• pt inclus
x pt exclus

b.) Graphiquement,

$$\text{Dis } f = \pi \mathbb{Z}.$$

Proveons le par l'analyse.

β est visiblement continue sur $[-\pi; 0]$ donc continue en tout pt de $]-\pi; 0[$ et continue à dr en $-\pi$ et à gauche en 0. De $\bar{m}$ β est continue sur $]0; \pi[$ de tout pt de $]0; \pi[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \beta(x) = 0$ puisque $\beta(x) = x$ sur $]0; \pi[$ or $0 \neq \beta(0)$ donc β n'est pas continue en 0 et par pénalité, elle n'est pas continue en tout pt de $2\pi\mathbb{Z}$.

De +, $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x = \pi$ /

Or $\pi \neq \beta(-\pi)$ donc β non continue en π
 $\Rightarrow \beta|_{]0; \pi[}(x) = x$ or $x \mapsto x$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$

$\beta|_{]-\pi; 0[} = x + \pi$ or $x \mapsto x + \pi$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi; 0]$ donc β est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi; \pi]$ et dc sur $\mathbb{R}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x+\pi) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right)$$

$$= \frac{((-1)^n + 1)}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

Pour $n=0$, on aura $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx$

$$= \frac{1}{\pi} [x^2]_0^{\pi}$$

$$= \pi$$

Pour $n \neq 0$

$$a_n = \frac{((-1)^n + 1)}{n\pi} \int_0^{\pi} x (\sin(nx))' dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1+(-1)^n}{n\pi} \left(\left[x \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(nx) dx \right) \\
&= \frac{1+(-1)^n}{n^2\pi} \left[\cos(nx) \right]_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^n + 1}{n^2\pi} \left((-1)^n - 1 \right)
\end{aligned}$$

Or $1+(-1)^n = 0$ si n impair
et $(-1)^n - 1 = 0$ si n pair
Donc $a_n = 0 \quad \forall n \neq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{(-1)^n + 1}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \\
&= \frac{(1+(-1)^n)}{n\pi} \int_0^\pi x (\cos(nx))' dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n\pi} \left(\left[x \cos(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(nx) dx \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n} \times (-1)^n \\
&= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n} = \begin{cases} \frac{-2}{n} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

La série de Fourier est donc :

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{-1}{k} \sin(2kx)$$

(après avoir
fait $n = 2k$
dans la
série)

e) On a une mg f et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$
 donc d'après le th de Dirichlet, cette série
 converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \notin \pi\mathbb{Z} \\ \frac{f(x) + f(x+\pi)}{2} & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$
 (moyenne des limites
 à gauche et
 à droite)

En particulier:

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(2nx) = \begin{cases} x+\pi & \text{si } x \in]-\pi; 0[\\ x & \text{si } x \in]0; \pi[\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = -\pi \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

Avec $x=0$ on a bien $\frac{\pi}{2}$, c'est cohérent.

f) On peut établir Parseval pour f et $\mathcal{C}^1$ par
 morceaux de continue par morceaux:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

ce qui donne ici:

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x+\pi)^2 dx + \int_0^{\pi} x^2 dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} x^2 dx + \int_0^{\pi} x^2 dx \right)$$

(avec le chgt de variable $t = x + \pi$)

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\text{Ainsi } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \\ = \frac{\pi^2}{6}$$

Avec $x = \frac{\pi}{4}$ on trouve que la série de Fourier de f vaut $\frac{\pi}{4}$, ce qui s'écrit :

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Or } \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(2n \frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) \\ \sin\left((2p+1) \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \end{cases} \\ = 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ = (-1)^p \text{ si } n = 2p+1$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \\ = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Exo3

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t^{2022}} dt$$

impropre en $+\infty$ mais pas en 1

Intégrande f est int sur $[1; +\infty[$ car continue

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^{2022}} = +\infty \text{ donc } \exists \eta \geq 1 \quad \forall t \in U(+\infty)$$

$$\text{On } \int_1^{+\infty} t dt \text{ diverge donc } I_4 \text{ diverge.}$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \underbrace{\cos(4t) e^{-st}}_{G(t)} dt$$

impropre en $+\infty$
mais pas en 0

car g cont. sur $[0; +\infty[$ et P est int. sur $[0; +\infty[$
Par ailleurs $|\cos(4t) e^{-st}| \leq e^{-st}$ sur $[0; +\infty[$

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \text{ converge (usual)}$$

Donc I_2 est absolument convergente.

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t+4}{\sqrt{t}(1+t^2)}}_{G(t)} dt$$

impropre en 0
et en $+\infty$

(i) G est cont. sur $]0; +\infty[$ et G est intégrable sur $]0; +\infty[$

$$(ii) \text{ Soit } I_{3,1} = \int_0^1 G(t) dt$$

$$G(t) \sim \frac{4}{\sqrt{t}} > 0 \quad \text{Or } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \text{ converge (Riemann usuel)}$$

donc $I_{3,1}$ converge par critère d'équivalence.

$$(iii) I_{3,2} = \int_1^{+\infty} G(t) dt$$

$$G(t) \sim \frac{t}{\sqrt{t} t^2}$$

$$\sim \frac{1}{t^{3/2}} > 0 \quad \text{Or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt \text{ converge}$$

donc $I_{3,2}$ converge donc I_3 converge

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{\underbrace{\sqrt{t} P_1(t)}} dt \quad \text{impropre en 0 et 1}$$

(i) β cont de Poch int sur $]0; 1[$

(ii) Soit $x = 1-t$
 $dx = -dt$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{1-x} - 1}{\underbrace{\sqrt{1-x} P_1(1-x)}} dx$$

$$\varphi(t) \underset{0}{\sim} \frac{e-1}{-x} \quad \text{car } \sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \quad \text{car } \varphi(t) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1-e}{x} < 0.$$

Or $\int \frac{1}{x} dx$ diverge (Riemann usuel)

Donc I_1^0 diverge par critère d'équivalent de signe constant.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \cdot x^n e^{-x} = 0$$

$$\text{donc } \forall x \in V(+\infty), 0 \leq x^n e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc I_n converge.

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs } \int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt &= \int_0^x t^{n+1} (-e^{-t})' dt \\ &= \left[t^{n+1} e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x (n+1) t^n e^{-t} dt \\ &= -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) \int_0^x t^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite, $I_{n+1} = (n+1) I_n$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$I_1 = 1! I_0$$

$$I_2 = 2 \times I_1 = 2! I_0$$

... Par récurrence

$$I_n = n!$$

c) I est impropre en 0

(i) β est cont. sur $]0; \frac{\pi^2}{4}]$ de β est int. sur $]0; \frac{\pi^2}{4}]$

$$(ii) \quad \beta(t) \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$$

β est donc prolongeable par continuité en 0 ce qui justifie la valeur de I .

$$\text{Soit } \varphi(t) = \cos(\sqrt{t})$$

$$\varphi \text{ est dér. sur }]0; \frac{\pi^2}{4}] \text{ avec } \varphi'(t) = \frac{-\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

$\sqrt{t} \in]0; \frac{\pi}{2}]$ qd $t \in]0; \frac{\pi^2}{4}]$ donc $\varphi'(t) < 0$
Ainsi φ est cont. et str. $\searrow$ sur $]0; \frac{\pi^2}{4}]$ elle induit une bijection de $]0; \frac{\pi^2}{4}]$ vers $[0; 1[$

$$x = \cos(\sqrt{t})$$

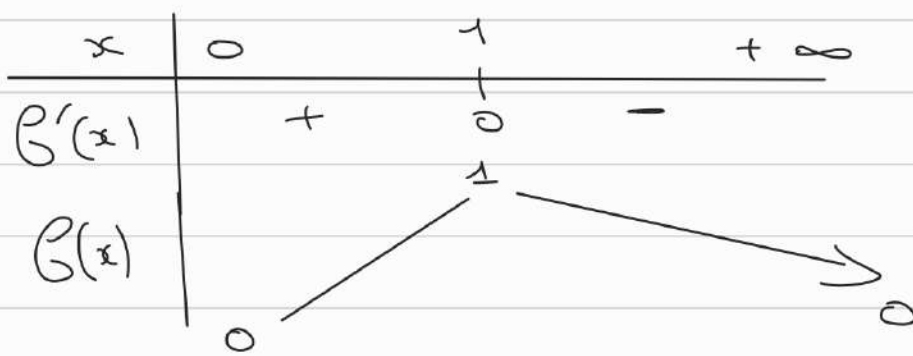
$$dx = \frac{-\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} dt$$

$$I = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \left[\arctan x \right]_0^1$$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

Exo 4

a) $f'(x) = e^{1-x} (1-x)$ sur $[0; +\infty[$



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(x) = x^n e^{n(1-x)}$
 dc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\text{ par op\'en\'e } \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \text{ par voisinage comp\'et.} \end{cases}$

Ainsi (f_n) converge simplement sur $[0; +\infty[$ vers
 $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) Chaque f_n est continue sur $[0; +\infty[$,
 si la suite (f_n) converge uniformement la limite g serait continue sur $[0; +\infty[$ ce qui n'est pas le cas. Ainsi la convergence n'est pas uniforme.

c) Sur $[0; 2]$ on a $0 \leq f_n \leq 1$ car
 $0 \leq f(x) \leq 1$ sur $[0; 2]$ et $f_n = f^n$

Soit φ la f de valeur 1 sur $[0; 2]$
 φ est continue sur $[0; 2]$ donc int\'egrable sur $[0; 2]$
 qui est un segment. Ainsi l'hypoth\ese (H_2) du
 th de convergence domin\'ee est v\'erifi\'ee.

L'hypothèse (H_1) c'est la convergence simple de (G_n) sur $[0; 2]$ et chaque G_n cont. sur $[0; 2]$ et loc. int. sur $[0; 2]$ donc elle est vérifiée.

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 G_n(x) dx = \int_0^2 g(x) dx = 0 \text{ d'après}$$

le th de convergence dominée.

$$\underline{d)} \quad f(x) \leq 1 \quad \text{donc} \quad \begin{matrix} G_n'(x) \\ G_n''(x) \end{matrix} \leq f(x) \text{ sur } [2; +\infty[$$

Donc $0 \leq G_n(x) \leq e^{-x/2}$ sur $[2; +\infty[$
 On $\int_2^{+\infty} e^{-x/2} dx$ converge (usual) donc

$x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$ et domine les G_n sur $[2; +\infty[$

e) Les hyp. (H_1) et (H_2) du th. de convergence dominée sont vérifiées sur $[2; +\infty[$ d'après ce qui précède, ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^{+\infty} G_n(x) dx = \int_2^{+\infty} g(x) dx = 0$$

□

