Correction CC 1 HOD
L_2 Math

Exo 1 : Cours

a) On reconnait une intégrale usuelle de Riemann en 0, on sait donc que

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge}\right) \iff (\alpha < 1)$$

b) Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ diverge.

Exo 2

Soit $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{e^t - 1}{\sin t}}_{f_1(t)}\,dt$

I_1 est impropre en 0 mais pas en 1 car f_1 est continue sur $]0;1]$ donc localement intégrable sur $]0;1]$

On a $f_1(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t}{t}$ (quotient de deux équivalents usuels)

donc $f_1(t) \underset{t \to 0}{\sim} 1$

Ainsi $\displaystyle\lim_{t \to 0} f_1(t) = 1$ et donc f_1 se prolonge par continuité en 0 et donc I_1 converge.

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \underbrace{\sqrt{t}\, e^{-2t}}_{f_2(t)}\, dt$$

I_2 est impropre en $+\infty$ mais pas en 1 car
$f_2 \in \mathcal{C}(\,]1;+\infty[\,, \mathbb{R})$

Or a $t^2 \times f_2(t) = t^{5/2} e^{-2t}$
donc $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_2(t) = 0$ par croissance comparée

donc $0 \leq f_2(t) \leq \frac{1}{t^2}$ sur $V(+\infty)$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge donc I_2 converge
par th. de majoration.

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{t^2+t+1}}_{f_3(t)}\, dt$$

I_3 est doublement impropre
le discriminant de t^2+t+1 est $\Delta = -3 < 0$
donc $f_3 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{t^2+t+1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} > 0 \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt \text{ converge}$$

donc $\int_0^{+\infty} f_3(t)\, dt$ converge

Par ailleurs, si on pose $J = \int_{-\infty}^{0} f_3(t)\,dt$

et que l'on fait le changement de variable $x = -t$ on a $dx = -dt$

donc J est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1}\,dt \quad \text{or} \quad \frac{1}{t^2-t+1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} > 0$$

donc ces intégrales convergent.

Donc I_3 converge.

Exo 3

a) Comme I_3 converge on sait que

$$I_3 = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$$

Soit $x > 0$

On a
$$\int_{-x}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int_{-x}^{x} \frac{1}{(t+1/2)^2 + 3/4}\,dt$$

$$= \int_{-x+1/2}^{x+1/2} \frac{1}{u^2+3/4}\,du$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-x+1/2}^{x+1/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

Comme $\lim_{u \to +\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{u \to +\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}$

on trouve $I_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$I_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

b) $I_4 = \int_0^{\ln 2} \frac{8e^{2t}+16e^t}{e^{2t}+2e^t-8}\,dt$

$$= \frac{(8e^t+16)}{(e^t)^2+2e^t-8} \times e^t\,dt$$

Soit $x = e^t$

$dx = e^t\,dt$

I_4 est de même nature que

$$J_4 = \int_1^2 \underbrace{\frac{8x+16}{x^2+2x-8}}_{G(x)}\,dx$$

Or J_4 est impropre en 2 mais pas en 1

car $x^2+2x-8 = (x-2)(x+4)$ donc

$G \in \mathcal{C}([1;2[)$ mais n'est pas définie en 2.

Posons $u = 2-x$

donc $du = -dx$

On a alors J_4 de même nature

que
$$H_4 = \int_1^0 \frac{8(2-u)+16}{-u(6-u)} \times (-du)$$

$$= \int_0^1 \frac{-8u+32}{u(u-6)}\,du$$

Or H_4 est impropre en 0 mais pas en 1 et $\frac{-8u+32}{u(u-6)} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{32}{-6u} < 0$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{u} du$ diverge on en déduit

I_4 diverge et donc I_4 ne se calcule pas parce qu'elle ne converge pas !

Cette partie sera surnotée car la formulation était trompeuse à cause d'une faute de frappe au dénominateur ...